

Dev n° 22Titre: Théorème SpectraleThm:

Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dim n .

Alors,

f est diagonalisable en BON.

Demo:

- P. q. $\mathcal{F}_f$ est scindé i.e. toutes les v.p. de f sont réelles:

Soit λ une v.p. de $A: \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ base orthonormée. λ peut être complexe.

Prenons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ v.p. associé à λ .

On a :

$$\begin{aligned} {}^t(Ax)\bar{X} &= {}^tX A \bar{X} \quad (\text{car } A \text{ sym.}) \\ \Rightarrow {}^t(\lambda X)\bar{X} &= {}^tX \bar{\lambda} \bar{X} \quad \text{car } Ax = \lambda X \text{ et } A\bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X}. \\ \Rightarrow \lambda {}^tX \bar{X} &= \bar{\lambda} {}^tX \bar{X} \\ \Rightarrow \lambda \underbrace{(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)}_{\neq 0 \text{ car } X \neq 0} &= \bar{\lambda} (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) \\ \Rightarrow \lambda &= \bar{\lambda} \\ \Rightarrow \lambda &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En posant $X_R = \text{Re}(X)$ et $X_I = \text{Im}(X)$, on obtient
$$\begin{cases} AX_R = \lambda X_R \\ AX_I = \lambda X_I \end{cases}$$

On prend X_R si $X_R \neq 0$ sinon X_I .

Donc, λ est une valeur réelle pour A avec un vecteur propre dans E .

- Montrons qu'il existe une BON de vecteur propre pour f :

Procédons par récurrence sur la dim $E = n$.

(I) $n=1$, OK

(II) On sq. vraie au rang $n-1$.

Montrons le au rang n .

Soit λ v.p. de f . Notons $H := (\text{vect}(x))^\perp$ où x v.p. associé à λ .

* P. q. H stable par f :

Soit $y \in H$, m. q. $f(y) \in H$ i.e. $\langle f(y), x \rangle = 0$:

$$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle y, \lambda x \rangle = 0$$

On a que $f|_H \in \mathcal{L}(H)$

* P. q. $f|_H$ est autoadjoint sur H :

Soient $v, w \in H$.

$$\langle f|_H(v), w \rangle_H = \langle f(v), w \rangle_E = \langle v, f(w) \rangle_E = \langle v, f|_H(w) \rangle_H$$

* Hypothèse de récurrence:

$\dim(H) = n-1$, donc par h. $\exists (e_1, \dots, e_{n-1})$ BON de vecteur propre de $f|_H$ et $\{x, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est une famille de v.p. de f .

Puis la famille $\{x, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est une base de E car $E = H \oplus H^\perp$ et

et $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille de $\vec{v}_p$ de f .
 Mais la famille $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E car $E = H \oplus H^\perp$ et x base de $H^\perp$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de H .

(CC1) $\exists$ bon de vecteur propre de f , donc f diagonalisable. $\square$

Remarque:

Le résultat est faux pour les matrices complexes.

Exemple:

Prenons la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$.

On a $\chi_A(X) = \det(A - X \text{Id}) = -2iX + X^2 - 1 = (X - i)^2$

On a i v.p. double.

On a:

$$A - i\text{Id} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ix$$

Donc, $\text{Ker}(A - i\text{Id}) = \text{Vect}((i, 1))$

Donc, A non diagonalisable car $\dim(\text{Ker}(A - i\text{Id})) = 1$.

Annexe:

• Faux pour les matrices complexes: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$ 1 v.p. double

En fait toutes les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q. $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$.

Vraie pour les formes hermitiennes.

• P.q. les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux:

Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ v.p. de f associé à $v_1, v_2 \in \vec{v}_p$.

P.q. $v_1 \perp v_2$.

$$\left. \begin{aligned} \langle f(v_1), v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle \\ \text{or } \langle v_1, f(v_2) \rangle &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

• Thm version matricielle:

Théorème :

- Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.
- Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E , alors il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u .

* Application:

$$\text{P.q. } \|A\| = \rho(A) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|, \quad \forall A \in \text{Sn}.$$

Par le thm $\exists P \in O(E)$ et D matrice diagonale t.q. $A = {}^t P D P$.

On a donc pour $x \in E$ t.q. $\|x\| = 1$:

$$\|Ax\| = \|{}^t P D P x\| \leq \|P(A) P x\| = \rho(A) \|x\| = \rho(A)$$

En passant au sup, on obtient $\|A\| \leq \rho(A)$.

Donc $\|A\| = \rho(A)$.

$$\|Ax\| = \|PDPx\| \leq \|P(A)Px\| = \rho(A)\|x\| = \rho(A)$$

En passant au sup, on obtient $\|A\| \leq \rho(A)$.

De plus, si λ v.p. de A :

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \frac{\|x\|}{\|x\|} = |\lambda|. \text{ Donc } \rho(A) \leq \|A\|$$

Donc, $\|A\| = \rho(A)$ $\square$

Thm:

Soit f un endo. autoadjoint d'un e. Euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dim n .

Alors, f diag. en BON.

Démo:

* P.g. χ_f scindé i.e. tous les v.p. de f sont réelles:

Soit λ une v.p. de $A = \text{Mat}_B(f)$ w B BON.

λ éventuellement complexe et $\bar{\lambda}$ son $\bar{v}$ associé. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On a:

$${}^t(AX)\bar{x} = {}^t x A \bar{x}$$

$$\Rightarrow {}^t(\lambda x)\bar{x} = {}^t x \lambda \bar{x}$$

$$\Rightarrow \lambda {}^t x \bar{x} = \bar{\lambda} {}^t x \bar{x}$$

$$\Rightarrow \lambda (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \bar{\lambda} (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

En posant $x_R := \text{Re}(x)$ et $x_I := \text{Im}(x)$, on a:

$$\begin{cases} Ax_R = \lambda x_R \leadsto \text{on prend } x_R \text{ si } x_R \neq 0 \text{ ou sinon } x_I \\ Ax_I = \lambda x_I \end{cases}$$

Donc, λ vp réelle par A avec un $\bar{v}$ dans E .

* P.g. $\exists$ BON de $\bar{v}$ de f :

Procédons par récurrence sur $\dim E = n$.

(I) $n=1$. OK.

(H) On s.q. vrai au rang $n-1$.

P.g. vrai au rang n .

Soit λ vp de f associé au $\bar{v}$ x . $H := (\text{Vect}(x))^\perp$.

• P.g. H stable par f :

Soit $y \in H$, m.g. $f(y) \in H$.

$$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \langle y, \lambda x \rangle = 0.$$

On a bien $f|_H \in \mathcal{L}(H)$.

• P.g. $f|_H$ autoadjoint sur H :

Soient $v, w \in H$.

$$\langle f|_H(v), w \rangle_H = \langle f(v), w \rangle_E = \langle v, f(w) \rangle_E = \langle v, f|_H(w) \rangle_H.$$

• Hypothèse:

$\dim H = n-1$. Donc, par h. $\exists (e_2, \dots, e_n)$ BON de $\bar{v}$ de $f|_H$ et $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ famille de $\bar{v}$ de f .

Mais $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ base de E car $E = H \oplus H^\perp$.

(CCL) $\exists$ BON de $\bar{v}$ de f , donc f diag. $\square$

Remarque:

Le résultat est faux pour les matrices complexes.

Exemple:

$$\text{Prendons } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}.$$

$$\text{On a } \chi_A(X) = \det(A - X \text{Id}) = -2iX + X^2 - 1 = (X-i)^2$$

On a i v.p. double.

On a

$$A - i \text{Id} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \leadsto \begin{cases} -ix + y = 0 \Rightarrow y = ix \\ x + iy = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \text{Ker}(A - i \text{Id}) = \text{Vect}((i, -1))$$

Donc, A non diagonalisable car $\dim(\text{Ker}(A - i \text{Id})) = 1$.